Tutorato 6 GE220

Docente: Massimiliano Pontecorvo. Esercitatore: Raffaele Carbone.
Tutori: Giovanni Passeri. Bruno Renzi.
Giovedì 19 aprile 2018.

N.B.: Gli esercizi asteriscati sono più impegnativi: non basta applicare in modo standard le definizioni e i teoremi per riuscire a risolverli, ma serve qualche idea in più. Gli esercizi senza asterisco sono più elementari, servono per esercitarsi a ragionare sui concetti e scrivere dimostrazioni applicando in modo rigoroso le definizioni e i teoremi visti a lezione.

Esercizio 1. *Rispondere alle seguenti domande:*

1. *Il quoziente di uno spazio topologico connesso è connesso?*
2. *Il quoziente di uno spazio topologico arco-connesso è arco-connesso?*

Esercizio 2. *Consideriamo il seguente sottoinsieme di* $\mathbb{R}^2$*:*

$$X := \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \partial B(0, q)$$

(dove per $x \in \mathbb{R}^2$ *e* $r \gneq 0$ *definiamo* $B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^2 : ||x - y|| \lneq r\}$*) con la topologia di sottospazio del piano euclideo.*

1. X *è connesso?*
2. X *è arco-connesso?*
3. *Quali sono le componenti connesse di* X*?*
4. *Quali sono quelle arco-connesse?*
5. X *è localmente connesso?*
6. X *è localmente arco-connesso?*

Esercizio 3. *Consideriamo il gruppo delle rotazioni* $SO(2)$ *di* $\mathbb{R}^2$*, con topologia euclidea, e la sua restrizione naturale al sottospazio* X *dell'esercizio precedente. A che cosa è omeomorfo* $X/SO(2)$*?*

Esercizio 4. *Consideriamo il pettine del topologo*

$$\mathcal{P} := ([0, 1] \times \{0\}) \cup (\cup_{n \in \mathbb{N}} \{\frac{1}{n}\} \times [0, 1]) \cup (\{0\} \times [0, 1]) \subseteq \mathbb{R}^2$$

e lo spazio topologico

$$\mathcal{P}' := ([0, 1] \times \{0\}) \cup (\cup_{n \in \mathbb{N}} \{\frac{1}{n}\} \times [0, \frac{1}{n}]) \subseteq \mathbb{R}^2.$$

1. *$\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ sono connessi? Sono arco-connessi?*

2. ** Sono omeomorfi?*

Esercizio 5. ** Mostrare che per ogni $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R} \approx \mathbb{R}^k$ rispetto alla topologia euclidea se e solo se $k = 1$.*

Esercizio 6. ** Mostrare che scelti comunque $a, b \in \mathbb{R}$ distinti, ogni funzione continua (secondo la topologia euclidea) $f : [a, b] \to [a, b]$ ammette un punto fisso, ovvero un punto $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = x_0$.*